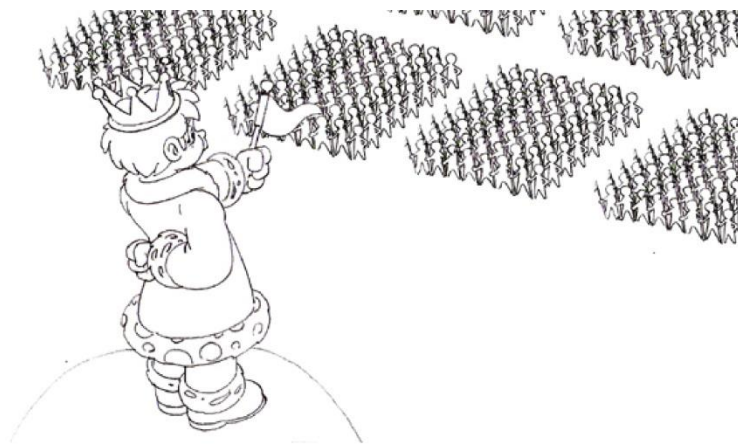


20 黑斯廷斯戰役…在雙曲線上尋找格子點

哈勒德二世國王的軍隊為防止強壯的諾曼軍冒險闖入他們的據點，哈勒德號令他的士兵們組成 61 個方陣隊形，而且每個方陣都有相同的人數。當哈勒德自己也加入這場戰爭時，所有的士兵們連同哈勒德國王便組成了一個更大的方陣，神聖的十字軍們大聲的高喊著：敵人滾出去！



這是西元 1066 年十月十四日，發生在英國的一場很關鍵性的戰爭，但戰爭的若干細節，歷史學家們仍然覺得神秘與無法理解。『將 61 隊十字軍小方陣們，在加入哈勒德國王後組成大方陣』原是古代宗教編年史中的一小段從未被注意過的故事。如果編年史的這段故事屬實的話，這將會是一道很有趣的算術問題，且讓我們來瞭解這道算術問題所隱藏的神秘與無法理解之處：

當時哈勒德國王的 61 個方陣隊形中，每邊有 y 個士兵，而大方陣隊形，每邊有 x 個士兵時， x 與 y 所滿足的方程式為何？又哈勒德國王的軍隊人數為何？

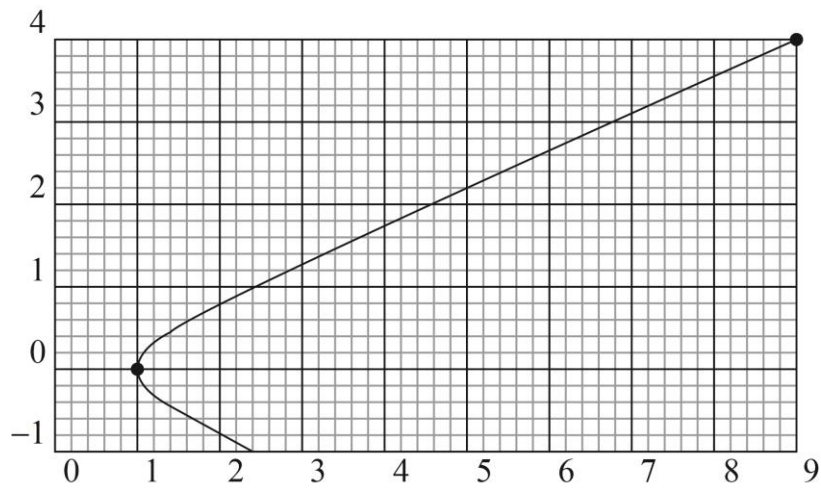
歷史學家找到當時流傳的一首詩，記載著哈勒德國王當時站在軍隊的中央（Carmen de Bello Hastingsi），而那時的另一份文件也記載著他們的方陣軍隊像一座城堡，敵人很難攻破（Henry of Huntingdon）。從這兩個記錄中，我們可以確認這段故事（把小方陣重

組成一個大方陣)的正確性是很高的。

根據當時的紀錄， x 與 y 所滿足的方程式為

$$x^2 - 61y^2 = 1.$$

學過圓錐曲線的人都知道，這個方程式所代表的圖形是雙曲線。因為方陣每邊的人數 x 與 y 都是正整數，所以想要知道哈勒德國王的軍隊人數，就必須求該雙曲線在第一象限所通過的格子點。像這樣的問題，數學家稱為佩爾方程式求解問題：就以比較簡單的例子 $x^2 - 5y^2 = 1$ 來說，除了 $(1,0)$ 之外，他所通過的下一個格子點為 $(9,4)$ ，如下圖所示：



讓我們回到哈勒德國王的方程式 $x^2 - 61y^2 = 1$ 來，如果用筆去算或者按按計算機，那麼將發現很難按到剛好都是正整數的解來。原因是，除了 $(1,0)$ 之外，這雙曲線所通過的下一個格子點為 $(x, y) = (29718, 3805)$ (好大的數字)。讓我們來算算看，哈勒德國王的軍隊人數。根據題意，軍隊人數為

$$61y^2 = 61 \times 3805^2 = 883159525.$$

這數字顯示：哈勒德國王的軍隊人數接近 9 億，顯然不合理，這也是史學家不解的地方。有一種猜測是這樣的，很可能 61 個方陣的軍隊是誤記，也許只有 60 個方陣的軍隊，這時候似乎會比較合理。

從雙曲線 $x^2 - 61y^2 = 1$ 的圖形，我們不難覺得它的圖形很近似一條直線往外延伸。事實上，它還不是一條直線，只是很快貼近它的漸進線而已。既然雙曲線的圖形往外接近漸

進直線，而直線上的格子點分佈是很有規律的，我們可以理解到：雙曲線上的格子點分佈可能也會有某種規律性的存在。事實上，這根 $\sqrt{61}$ 的連分數有關，只是他不在我們討論的範圍。